Tajemnice **Królowej Nauk**

Czyli wszystko, co musisz wiedzieć na 5 minut przed maturą z matematyki

Do matury jeszcze pięć miesięcy, ale na naukę nigdy nie jest za wcześnie! W tym miesiącu prezentujemy jedyny w swoim rodzaju zestaw typowych matematycznych błędów oraz użytecznych porad – wszystko przydatne na egzamin z matematyki.

MATURA z matematyki 2009

opr. Grzegorz Gałuszka, Lech Rostkowski, Krzysztof Frączek, Matematyka.org, ForumMatematyka.pl, Poolicz.pl

Śpiesz się powoli czyli uwaga na błędy

Podczas rozwiązywania zadań maturalnych najczęściej popełniamy typowe **błędy rachunkowe** oraz tzw. **błędy nieuwagi**. Pierwszy ich rodzaj pojawia się wskutek pośpiechu i zdenerwowania (jak choćby: $2^3 = 6$, $\sqrt{4+9} = \sqrt{4} + \sqrt{9}$).

Błędy nieuwagi powstają najczęściej przy przepisywaniu równania czy warunku z jednej strony na drugą, także z brudnopisu do czystopisu, a nawet z linijki do linijki. Do tego dochodzą pomyłki wynikające z niezbyt uważnego przeczytania treści zadania, a więc nieprawidłowo sformułowane odpowiedzi czy przeoczone polecenia. Można ich uniknąć tylko przez wzmożoną koncentrację i opanowanie, bardzo pomocne są tu wcześniejsze ćwiczenia rachunkowe nawet na prostych zadaniach.

Kolejny częsty rodzaj błędów dotyczy **zadań geometrycznych**. Maturzysta bezwiednie rysuje jakiś specjalny przypadek, o którym nie ma mowy w poleceniu (np. w zadaniu o dowolnym trójkącie rysunek przedstawia jakiś charakterystyczny trójkąt – prostokątny lub równoramienny), a następnie te specjalne własności figury geometrycznej z rysunku wykorzystuje w rozwiązaniu zadania.

Strategia: jak rozwiązywać maturalne zadania?

1. Egzamin zacznij od szybkiego przejrzenia wszystkich zadań i już podczas pierwszego czytania staraj się wynotować wszelkie dane, przydatne wzory lub sugestie naprowadzające na rozwiązanie. Jeśli już na tym etapie pojawi się koncepcja kompletnego rozwiązania – zanotuj ją i przejdź do następnego zadania.
2. W pierwszej kolejności rozwiąż te zadania, z którymi nie masz żadnych problemów. Następnie wróć do tych, których rozwiązania nie byłeś pewny. Dopiero na samym końcu spróbuj rozwiązać te, o których na początku pomyślałeś, że sobie z nimi nie poradzisz.
3. Odpowiedź podana w rozwiązaniu zadania musi korespondować z jego założeniami, dlatego przed jej zapisaniem ponownie przeczytaj treść pytania. Pamiętaj, by wyraźnie oznaczyć właściwe rozwiązanie, gdyż zostawienie jednego poprawnego i kilku błędnych skutkuje nie przyznaniem punktów.
4 Nigdy nie siedź długo nad zadaniem, jeżeli nie pojawia się szansa na jego rozwiązanie.
5. O ile to możliwe, rozwiązuj zadania od razu w czystopisie, w ten sposób zaoszczędzisz cenny czas.
6. Pamiętaj, że większość zadań na maturze łączy w sobie różne działy matematyki.
7. W matematyce, w odróżnieniu od innych przedmiotów, nie jest ważna metoda, tylko wynik. Zdarzało się już, że niektóre zadania maturalne można było rozwiązać nawet 9 sposobami – każdy z nich był poprawny i dawał maksymalną liczbę punktów. Jeśli użyjesz bardzo nietypowej metody, za to w poprawny sposób, to i tak otrzymasz maksa!

Procenty, procenty, procenty

Egzaminatorzy bardzo lubią zadania z procentami. Rozwiązując te najbardziej typowe warto czasem „na chwilę" wprowadzić pomocniczą niewiadomą.

Przykład: Lodówka najpierw podrożała o 10%, a potem w ramach promocji potaniała o 15%. O ile procent zmieniła się cena lodówki?

Zauważmy, że nie znamy początkowej jej ceny, ale jak się zaraz okaże, do niczego nie będzie nam ona potrzebna. Oznaczam początkową cenę lodówki przez x. Po podwyżce o 10% będzie ona wynosić $x + 10\%x = 110\%\,x = 1{,}1x$. Obniżka o 15% da nam cenę

$1{,}1x - 15\% \cdot 1{,}1x = 1{,}1x - 0{,}165x = 0{,}935\,x$. Teraz musimy policzyć zmianę procentową:

$$\frac{0{,}935x - x}{x} \cdot 100\% = \frac{-0{,}065x}{x} \cdot 100\% = -6{,}5\%.$$

A zatem lodówka staniała o 6,5%.

Często spotykanym typem zadań z obliczeniami procentowymi są porównania. W ich przypadku należy pamiętać, że zawsze dzielimy przez wielkość, która występuje po słowach *niż* i *od*.

Przykład: Jaś ma do szkoły 2 km, a Małgosia 3 km. O ile procent Małgosia ma dalej do szkoły niż Jaś, a o ile procent Jaś ma bliżej niż Małgosia?

Najpierw obliczamy różnicę pomiędzy odległością od szkoły Jasia i Małgosi, która wynosi oczywiście 3 km – 2 km = 1 km. W pierwszym przypadku porównujemy uzyskany wynik do odległości Jasia, otrzymując $\frac{1km}{2km} \cdot 100\% = 50\%$, czyli Jaś ma o 50% bliżej niż Małgosia. W drugim porównujemy do odległości od szkoły Małgosi, co daje nam wynik 33,33%.

Idź na skróty!

Wiele zadań daje się rozwiązać na kilka sposobów, z których część jest zdecydowanie krótsza od innych. By ułatwić sobie życie na egzaminie warto poznać kilka sztuczek wykraczających poza minimum programowe – zastosowanie **wektorów** w geometrii analitycznej czy **wyznaczników** do rozwiązywania układów równań, twierdzenie cosinusów, twierdzenie o pierwiastkach całkowitych, dzielenie wielomianów zamiast ich grupowania, zastosowanie wzorów kombinatorycznych.

Przykład: Znajdź długość wysokości opuszczonej na bok *AB* w trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 2)$; $B = (1, -3)$, $C = (3, 5)$

Tradycyjnie zadanie rozwiązujemy następująco: szukamy równania prostej *AB*, szukamy równania prostej prostopadłej do *AB* przechodzącej przez *C*, szukamy punktu przecięcia się tych prostych (np. punkt *D*), szukamy odległości *CD* i tak uzyskujemy wysokość. Mamy tu jednak sporo liczenia – trzy układy równań i wzór na odległość. Tymczasem wystarczy policzyć ze wzoru z tablic (albo wyznaczników pary wektorów) pole trójkąta *ABC* oraz odległość *AB* (podstawa trójkąta), aby długość wysokości dostać niemal od ręki.

Rozgryźć kalkulator

Przed maturą koniecznie przetestuj możliwości swojego kalkulatora (pamiętaj, że musi być to kalkulator prosty, gdyż na egzaminie niedozwolone jest używanie kalkulatorów naukowych). W zależności od modelu można liczyć np. $0{,}125^2$ poprzez naciśnięcie klawiszy 0,125X= albo $(1{,}05)^6$ naciskając 1X1,05= = = = = = (dla niektórych kalkulatorów 1,05X1= = = = = =). Do tego warto nauczyć się posługiwania pamięciami (klawisze M+, M-, MR), które bardzo przydają się w zadaniach ze statystyki.

Ważne drobiazgi techniczne

- W żadnym wypadku nie używaj korektora, gdyż praca może zostać unieważniona. Najlepiej wcale nie bierz go na egzamin.
- Poza rysunkami staraj się nie używać ołówka. Jeżeli zapomnisz poprawić swoje zapiski długopisem, to ten fragment pracy nie będzie oceniany.
- Nigdy nie sugeruj się wielkością miejsca na arkuszu przeznaczonego na rozwiązanie. Czasem na zadanie wymagające zaledwie pięciu linijek rozwiązania przeznaczone są dwie strony, czasem odwrotnie.
- Jeśli nie starczy Ci miejsca na arkuszu, kontynuuj rozwiązanie w brudnopisie. Koniecznie jednak przekreśl słowo *brudnopis* i napisz *ciąg dalszy czystopisu* podając numer zadania, a na arkuszu zaznacz, że dalsze rozwiązanie jest w brudnopisie.
- Komentarze, nawet te poprawne, ale nie wymagane w treści zadania, nie są przez egzaminatorów brane pod uwagę.

Wzory dobrze znać

Na egzaminie masz dostęp do wzorów zapisanych w tablicach matematycznych, nie trzeba więc zaraz uczyć się ich na pamięć (choć warto, gdyż nie będzie tam wszystkich wzorów i twierdzeń – dla własnego bezpieczeństwa przed maturą dokładnie zapoznaj się z tablicami). Koniecznie zaś trzeba wiedzieć o ich istnieniu tak, by móc je zastosować podczas rozwiązywania zadań.

Najważniejszą sprawą jest dostosowanie literek ze wzorów do naszych oznaczeń. Pamiętaj, że nie zawsze *x* we wzorze odpowiada literce *x* w zadaniu. Uważaj, by nie zapomnieć o wartości a we wzorze na pierwiastki równania kwadratowego (zamiast $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ maturzyści często piszą $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$) czy pierwiastku z delty (często pojawia się sama delta). Zwróć też uwagę na prawidłowe stosowanie wzorów skróconego mnożenia (zamiast $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ często piszemy $(a+b)^2 = a^2 + b^2$).

Więcej potu na ćwiczeniach = mniej krwi w boju

Jak rzetelnie przygotować się do egzaminu z matematyki? Oto nasze rady:

- Codziennie poświęć godzinę zegarową na rozwiązywanie zadań, odpoczywaj w weekendy
- Uczestnicz we wszystkich dodatkowych bądź bezpłatnych zajęciach z matematyki
- Rozwiązuj archiwalne zadania maturalne
- Uzupełniaj braki w teorii korzystając z podręczników lub internetu, choćby serwisu **www.Matematyka.org**
- Rozwiązania zadań sprawdzaj za pomocą internetowego kalkulatora **www.Poolicz.pl**, który wszystko liczy „krok po kroku"
- Przeglądaj moderowane przez matematyków fora dyskusyjne, dziel się na nich swoimi obawami, pytaj – np. na **www.ForumMatematyka.pl**

Przydatne triki i ważne wzory:

Geometria:

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$, $C=(x_C, y_C)$:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

Pole trójkąta:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ah$$

$$P_{ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $2p = a + b + c$ (obwód trójkąta), R – promień okręgu opisanego i r – promień okręgu wpisanego;

Graniastosłup prosty:
Pole powierzchni:
$P = 2p \cdot h + 2P_p$, gdzie 2p jest obwodem podstawy danego graniastosłupa, a P_p polem podstawy
Objętość:
$V = P_p \cdot h$

Ostrosłup:
Objętość:
$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$

Kula:
Pole powierzchni:
$P = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
Objętość:
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
r – promień kuli

Stożek:
Pole podstawy:
$P_b = \pi \cdot r \cdot l$
$P_p = \pi \cdot r^2$
$P = \pi \cdot r \cdot (r + l)$
Objętość:
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$
r – promień podstawy,
h – wysokość stożka,
l – długość tworzącej stożka;

Kąty w okręgu:
Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.
Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tych samych łukach są równe.

Prostopadłościan:
Pole powierzchni:
$P = 2(ab + bc + ac)$
Objętość:
$V = abc$

Pole trapezu:
$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Pole równoległoboku:
$P = ah$

Deltoid:
$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$

Walec:
Pole powierzchni:
$P_b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
$P_p = \pi \cdot r^2$
$P = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$
Objętość:
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
r – promień podstawy,
h – wysokość walca

Czego nie będzie – poziom podstawowy

Osoby zdające maturę w roku szkolnym 2008/2009, były przygotowywane do egzaminu na bazie programów nauczania uwzględniających podstawę programową sprzed września 2007r. Mając na uwadze wprowadzone zmiany oraz mogące z tego powodu wyniknąć problemy, na portalu **Perspektywy.pl** znajdziesz listę treści, które nie będą obowiązywały na danym poziomie egzaminów.

www.perspektywy.pl/matematyka

Podstawy, które musisz znać:

Wzory uproszczonego mnożenia i działania na pierwiastkach

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Jeżeli $a \geq 0$, $b \geq 0$, $m,n \in N \setminus \{0,1\}$ to:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ dla b>0
$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Udowodnij, że $\sqrt{13+4\sqrt{3}} - \sqrt{13-4\sqrt{3}}$ jest liczbą całkowitą

Niech, $x = \sqrt{13+4\sqrt{3}} - \sqrt{13-4\sqrt{3}}$

policzmy x^2

$x^2 = (\sqrt{13+4\sqrt{3}} - \sqrt{13-4\sqrt{3}})^2 =$
$13 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{13^2 - (4\sqrt{3})^2} + 13 - 4\sqrt{3} =$
$26 - 2\sqrt{169 - 16 \cdot 3} = 26 - 2\sqrt{121} = 26 - 22 = 4$

Zatem $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{4} = 2$

Działania na potęgach

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$
$a^1 = a$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
dla m>n ` $a \neq 0$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
dla $b \neq 0$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Oblicz wartość wyrażenia:

$$(32^3 - 16^4 + \left(\frac{64^4}{2 \cdot 2^{21}}\right)^{-1} - 8^5 \cdot (-1)^3)^{-1} =$$

$$(2^5)^3 - (2^4)^4 + \left(\frac{(2^6)^4}{2^{22}}\right)^{-1} - (2^3)^5 \cdot (-1)^3)^{-1} =$$

$(2^{15} - 2^{16} + 2^{-2} + 2^{15})^{-1} =$
$(2 \cdot 2^{15} - 2^{16} + 2^{-2})^{-1} =$
$(2^{16} - 2^{16} + 2^{-2})^{-1} = 2^2 = 4$

Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego o danym pierwszym wyrazie a_1:
$a_n = a_1 + (n-1)r$

Wzór na sumę n pierwszy wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n$$

Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie a_1:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Wzór na sumę n pierwszy wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & dla\ q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & dla\ q = 1 \end{cases}$$

Uzasadnij, że jeżeli liczby *x, y, z* tworzą ciąg arytmetyczny rosnący, to liczby
$a = 2^{3-5x}$, $b = 2^{3-5y}$, $c = 2^{3-5z}$ tworzą ciąg geometryczny malejący.

Wiemy, że $x < y < z$ oraz z definicji ciągu arytmetycznego $x - y = y - z$. Aby ciąg *a, b, c* był ciągiem geometrycznym musimy wykazać, że

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} : \frac{c}{b} = \frac{2^{3-5z}}{2^{3-5y}} = 2^{5y-5z} = 2^{5(y-z)}.$$

Korzystając z równości $x - y = y - z$ mamy:

$$\frac{c}{b} = 2^{5(x-y)} = 2^{5x-5y} = \frac{2^{3-5y}}{2^{3-5x}} = \frac{b}{a}$$

Udowodniliśmy, że ciąg liczb *a, b, c* jest geometryczny.
Pozostało nam dowieść, że ciąg jest malejący.

Weźmy parę *a, b* i policzmy iloraz $\frac{b}{a}$:

$$\frac{b}{a} = \frac{2^{3-5y}}{2^{3-5x}} = 2^{5x-5y} = 2^{5(x-y)}.$$

Z zależności $x < y < z$: $x - y < 0$.

Niech: $\frac{b}{a} = 2^{-5k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5k}$, gdzie $k = -(x-y)$.

$\frac{b}{a} = 2^{-5k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5k}$ i $k > 0$.

Wykazaliśmy, że iloraz ciągu jest mniejszy od 1 i większy od 0, więc ciąg jest malejący.

Za miesiąc: Na 5 minut przed... WOS